

# 材料デザイン学 第4回

## 機械的特性 / 複合材料 / 弾性率

岸田 逸平

Last-modified: 2016/10/12 22:25:10.

### 目次

1	複合材料の応用例	2
2	定義	2
3	単一素材での機械的特性	3
4	設計: 弾性率・比弾性率の設計の例	4
4.1	モデル化と設計	4
4.1.1	単純なモデル化	5
4.1.2	スラブモデル	6
4.1.3	スラブモデルの問題点	10
5	まとめ	11
6	小レポート	11
6.1	前回講評	11
6.2	今回課題	11
6.3	コメント欄	12

複合材料は「設計できる材料」と言われる。どういう特徴からそのように言われ、どのような材料特性を設計できるのだろうか？

## 1 複合材料の応用例

- 土壁：竹と縄・藁
- ベニヤ板
- \_\_\_\_\_ : ビル, 橋梁, ダム
- \_\_\_\_\_ \*1
  - \_\_\_\_\_ (Glass -): ガラス繊維, プラスチック; 釣竿, 浴槽, 小型船舶
  - \_\_\_\_\_ (Carbon -): カーボン繊維, プラスチック; 自転車のカーボンフレーム, 航空機 (ボーイング 787), ゴルフクラブのカーボンシャフト

## 2 定義

原意は「複数の材料を組み合わせで一体的に組み合わせた材料」。研究者によって定義が異なる部分がある。例えば、

- 合金 (析出強化・固溶強化) を含めるか。 (e.g., 炭素鋼, ジュラルミン)
- 構造材料のみに限るか、機能材料も含めるか。 (e.g., バイメタル, ダイオード)
- 目的意識を持って設計したものに限るか。 (e.g., 竹, 骨などの生体材料) \*2

本講義では細かい定義の違いには深く立ち入らず、線材 (ファイバー, fiber) と母材 (母材, matrix) の組み合わせによる理論的な材料設計について議論する。ただし、具体的な話とし

---

\*1 単に FRP と言った場合、GFRP を指すことが多い。

\*2 複合材料に対応する英語としては Composite material が一般的だが、Tailored material を該てる研究者もいる。これは目的意識に重心を置いた考え方をしている。この定義は問題があると個人的には思う。人間が存在しなくてもその材料が存在しうる。2人の人間がそれぞれ別の研究としてある材料を開発したとき、一方は設計して、他方は設計せずに達成したならば、それは複合材料と呼ぶべきだろうか？骨と同じ構造を人間が作るまではそれは複合材料ではないのだろうか？ここでは「そういう定義をする研究者もいる」というのに留める。

て理解し易くするために、繊維強化プラスチック (Fiber Reinforced Plastics, FRP) を想定する。

### 3 単一素材での機械的特性

一般に、繊維として使われる材料 (e.g., ガラス繊維) の特徴は、

- 引張に \_\_\_\_\_ (高強度・高弾性率)
- 圧縮に \_\_\_\_\_。容易に変形する
- 靱性が \_\_\_\_\_。
- ブロック状への形成が \_\_\_\_\_

また、母材として使われる材料 (e.g, プラスチック) の特徴は

- 引張に \_\_\_\_\_ (低強度・低弾性率)
- 圧縮に比較的 \_\_\_\_\_
- 靱性が \_\_\_\_\_
- ブロック状への形成が \_\_\_\_\_

一方の材料の弱いところを他方の強い所で補うというのが基本的な考えである。理想的には、各材料それぞれの欠点をそれぞれの長所で克服した材料となる。しかし「強い・弱い」という定性的な評価では定量的な材料設計を行えない。実際の材料設計には定量的な物性値を使う。

- \_\_\_\_\_ : 物事の性質だけを捉えているということ。量は注意しない。  
e.g., 酸化銅を炭素で還元すると、銅と二酸化炭素が生成される。
- \_\_\_\_\_ : 物事の性質について、数量を含めて捉えているということ。  
e.g., 2 mol の酸化銅を 1 mol の炭素で還元すると、2 mol の銅と 1 mol の二酸化炭素が生成される。  
$$2\text{CuO} + \text{C} \rightarrow 2\text{Cu} + \text{CO}_2$$

本項では、使用する各材料の特性は既知のものであることを前提とする。この前提は実際の複合材料設計の殆どの場面に適合する。値の知られていない全く新規の素材を使う場合で

あっても、単一素材としてのこれらの値を測定することはそれほど難しいことではない。ここでは、Table 1 のような表が既に得られているとする。<sup>\*3</sup>

表 1 (table20131105a) 各種材料の室温での引張特性。ただし、正確な値ではない。理解し易さを優先し、値に幅があるものも 1 つの値で代表している。

材料	密度 $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	引張強度 $\sigma$ [GPa]	引張弾性率 $E$ [GPa]
マルエージング鋼	7.83	1.95	200
シリカガラス	2.55	4.5	86
アラミド繊維	1.44	4.1	120
炭素繊維	1.76	3.2	230
フェノール樹脂	1.20	0.05	5.0
エポキシ樹脂	1.25	0.06	4.0

## 4 設計: 弾性率・比弾性率の設計の例

複合材料の設計はまず使用する部位を決め、目標性能を決めるところから始めることが多い。たとえば航空機の主翼に使う、<sup>\*4</sup> 高圧ガスの耐圧容器に使うといったものが挙げられる。そしてその部位に用いる際に要求される機械的特性を決定する。今回は、弾性率および比弾性率に注目する。たとえば航空機の主翼は、破壊強度が高かったとしても、大きくたわんでしまえば揚力を得られなくなってしまうため、弾性率の設計が重要である。

### 4.1 モデル化と設計

何故モデル化が必要か 設計を行う際には実験をおこなわずに、机上の理論で  
TODO 勿論、作ってみて実験すれば分かるものだ。しかし、それが許されるのは予算と時間が潤沢にある場合のみである。いかにして少ない実験で最適な設計を導くか。

実験だと、ななめの繊維とかたくさん含まれる。

繊維断面の形状を仮定できる？

<sup>\*3</sup> アラミド繊維はデュボン社のケブラーという商品名の方が有名かもしれない。ミリタリー物の漫画とかに防弾チョッキの素材としてよく出てくるね。

<sup>\*4</sup> 余談: ボーイング 787。構造部材のほとんどが CFRP。ただし、エンジンには金属が、レーダー被覆部には GFRP が使われている。

円形としてモデル化？

円形だとしても、T 方向の弾性率を議論できるか？

#### 4.1.1 単純なモデル化

複合材料は多くの場合、2 種類の材料を一定の比率で混合することで作られる。最も単純なモデルは、全ての機械的特性がこの比率に比例する値を持つというものだろう。このモデルは現実からかけ離れてはいるが、素材の選定と比率の決定によって目的とする性能通りの設計というイメージが掴めるだろう。このモデルを仮に線形モデルと呼ぶことにしよう。<sup>\*5</sup>

まずこの線形モデルで材料設計を行ってみる。比弾性率は \_\_\_\_\_ を \_\_\_\_\_ で割ったものなので、\_\_\_\_\_ と表せる。これを求めたものが Table 2 である。ここでは今後の議論で使う幾つかの数値も一緒に求めてある。ここで、エポキシ樹脂とシリカガラスを使って比弾性率 10 [kN · m/kg] の複合材料を作りたいとする。先の線形モデルで考えると、繊維と母材の配合比率を  $r : (1 - r)$  として、

$$33.7r + 2.80(1 - r) = 10 \quad (1)$$

$$33.7r + 2.80 - 2.80r = 10 \quad (2)$$

$$33.7r + 2.80 - 2.80r = 10 \quad (3)$$

$$30.9r = 7.2 \quad (4)$$

$$r = 0.233 \quad (5)$$

すなわち、おおよそエポキシ樹脂 3 に対してシリカガラス 1 で作成すれば良いことになる。実際の複合材料設計であっても、モデルと数式をより厳密にして、これと同じことをしているだけのことである。

なお複合材料の基本特性のうち \_\_\_\_\_ は組織鈍感特性であり、この線形モデルで求められる値とほぼ一致する。すなわち、

$$\rho_c = r\rho_f + (1 - r)\rho_m \quad (\text{eq20141111b}) \quad (6)$$

本節で用いた線形モデルのように、体積比率に線形に従う定量的な評価のことを \_\_\_\_\_ と呼ぶ。<sup>\*6</sup>

<sup>\*5</sup> この「線形モデル」という用語はこの講義で諸君らの理解を促すために作ったもので、学術的に使われる用語ではない。よってこの語を覚える必要は全くない。

<sup>\*6</sup> ただし、複合則という言葉は研究者によって定義が異なる場合がある。非線形性の強い特性変化の領域も含めて複合則と呼ぶ人もいる。

表 2 (table20131105b) 各種材料の室温での引張特性と材料指数。

材料	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$\sigma$ [GPa]	$E$ [GPa]	$\sigma/\rho$	$\sqrt{\sigma}/\rho$	$E/\rho$	$\sqrt{E}/\rho$	$^3\sqrt{E}/\rho$
マルエージング鋼	7.83	1.95	200	0.249	0.178	25.5	1.81	0.75
シリカガラス	2.55	4.5	86	1.765	0.843	33.7	3.64	1.73
ケブラー	1.44	4.1	120	2.847	1.406	83.3	7.61	3.43
炭素繊維	1.76	3.2	230	1.818	1.016	130.68	8.62	3.48
フェノール樹脂	1.20	0.05	5.0	0.042	0.186	4.17	1.86	1.42
エポキシ樹脂	1.25	0.06	3.5	0.048	0.200	2.80	1.50	1.21

#### 4.1.2 スラブモデル

先の線形モデルは現実の繊維強化材料の弾性率を表現する近似としてはあまりに粗すぎる。材料の体積分率しか見ていないため、繊維の構造を全く反映していない。これでは繊維ではなく砂粒を入れても同じ評価になってしまう。本節ではより精度の高いモデルと、その数式での表現を導く。

実際の繊維強化複合材料を反映するモデルとして第一に用いられるのは Fig. 1 で示すような \_\_\_\_\_ である。<sup>\*7</sup> まず一方向に並べた繊維と母材から構成された一方向繊維強化複合材料を想定し、スラブモデルでは繊維および母材の体積比と等しい2つの \_\_\_\_\_ が完全に接着したものと見做す。

Fig. 1(b) に示すモデルの外力による変形から繊維軸方向 L (longer direction) と繊維軸直角方向 T (thickness direction) の弾性率を計算する。

弾性率の複合則は、バネを直列・並列につないだときの合成バネ定数と同様に考えることができる。繊維軸方向に外力が作用して弾性変形を起こしている場合を考える。この場合、繊維と母材の接着は完全であり、繊維と母材の外力作用方向の伸び (= 歪み, 変形) は等しいと仮定する。

L 方向 ここではまず、L 方向に注目する。複合材料全体で負担する L 方向の外力を  $\sigma_c$  と置く。すなわち  $\sigma_c = \sigma_L$  である。この応力のうち、繊維が  $\sigma_f$ , 母材が  $\sigma_m$  を負担したと

<sup>\*7</sup> slab: 幅の広い厚板。 a stone slab 石板

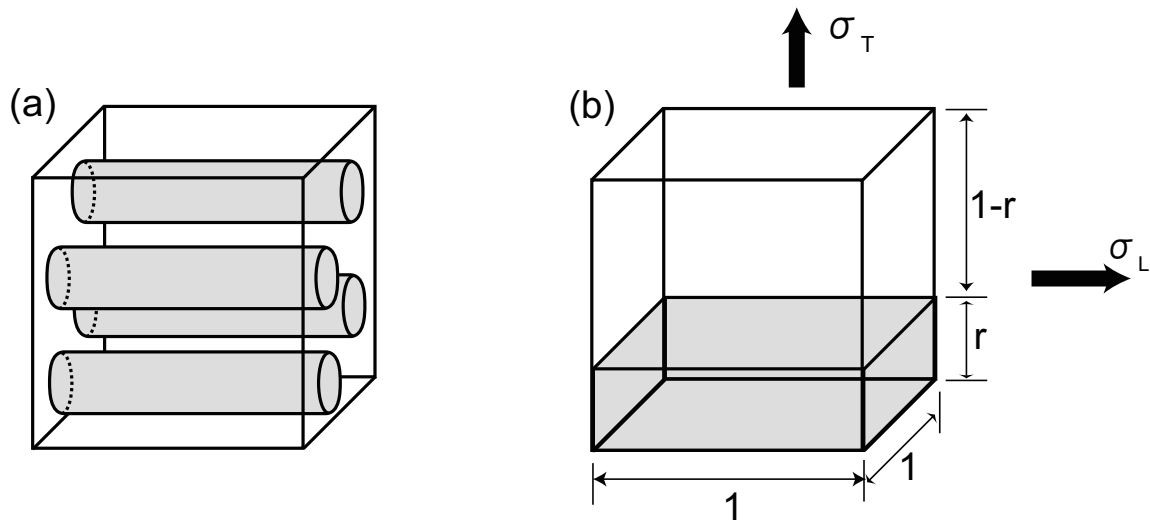


図1 (fig20131105b) スラブモデルの模式図。(a) 繊維を含む母材の構造。(b) 少なくとも繊維方向に広がった平板状のスラブモデル。 $\sigma_T$  は長手方向に働く応力、 $\sigma_L$  は厚さ方向に働く応力、 $r$  は繊維の体積分率である。

する。<sup>\*8</sup> すなわち、

$$\sigma_c = \sigma_f + \sigma_m \quad (\text{eq20131106b}) \quad (7)$$

このとき、繊維と母材の両方が繊維軸方向（繊維の長さ方向）に  $\Delta l$  伸びたとする。また、複合材料の繊維軸方向、繊維、母材それぞれの弾性率を  $E_c, E_f, E_m$  とする。応力  $\sigma$  は弾性率  $E$  とひずみ  $\Delta l$  によって、 $\sigma = E\Delta l$  と表せることから、<sup>\*9</sup>複合材料全体、繊維部分、母材部分のそれぞれに注目して以下の3式が導ける。

$$\sigma_c = E_c \cdot \Delta l \quad (8)$$

$$\sigma_f = E_f \cdot \Delta l \cdot r \quad (\text{eq20131106a}) \quad (9)$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \Delta l \cdot (1 - r) \quad (10)$$

ここで、複合材料モデル全体の各辺の長さが単位長であることを使っている。なお eq. (9) について、 $E_f \cdot \Delta l$  は体積全部が繊維で満たされた時の応力なので、断面積の比率  $r$  を乗じる必要がある。他の式も同様である。これら3式を eq. (7) に代入すると、

<sup>\*8</sup> c: composite, f: fiber, m: matrix の頭文字である。

<sup>\*9</sup> バネの力の式、 $F = -kx$  と同じ。

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \sigma_f + \sigma_m \\ E_c \cdot \Delta l &= E_f \cdot \Delta l \cdot r + E_m \cdot \Delta l \cdot (1 - r)\end{aligned}\quad (11)$$

$$E_c = E_f \cdot r + E_m \cdot (1 - r) \quad (12)$$

一般的な複合材料では  $E_f \gg E_m$  であるので、以下のように近似できる。

$$E_{c,L} = E_f \cdot r \quad (13)$$

ここで、 $E_{c,L} = E_c$  である。後に述べる T 方向の議論と区別するために、L 方向であることを明示して変数名を変えておいた。

複合材料全体の繊維軸方向の弾性率は、ほぼ \_\_\_\_\_ の弾性率とその体積比率で決定されることが分かる。

T 方向 次に Fig. 1 のスラブモデルで繊維軸直角方向 T に応力が作用して弾性変形を起こしている場合を考える。T 方向の応力について複合材料全体、繊維、母材それぞれが負担する応力を  $\sigma_c, \sigma_f, \sigma_m$  とする。<sup>\*10</sup> 直列に構成されていることに注意し、これらの応力の関係は、以下のように表せる。

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_m \quad (\text{eq20131106g}) \quad (14)$$

また、複合材料全体、繊維、母材それぞれの伸びを  $\Delta l_c, \Delta l_f, \Delta l_m$  とすると、

$$\Delta l_c = \Delta l_f + \Delta l_m \quad (\text{eq20131106f}) \quad (15)$$

である。ここでも  $\sigma = E\Delta l$  の関係を使い、<sup>\*11</sup> 複合材料全体、繊維部分、母材部分のそれぞれに注目して以下の 3 式が導ける。

$$\sigma_c = E_c \cdot \Delta l_c \quad (\text{eq20131106d}) \quad (16)$$

$$\sigma_f = \frac{E_f}{r} \cdot \Delta l_f \quad (\text{eq20131106c}) \quad (17)$$

$$\sigma_m = \frac{E_m}{1 - r} \cdot \Delta l_m \quad (\text{eq20131106e}) \quad (18)$$

<sup>\*10</sup> これらは先述の同名の変数とは異なるものである。 $\sigma_{c,L}$  と  $\sigma_{c,T}$  のように最初から区別する方法もあるが、添字が多すぎるとゴチャゴチャして見難くなるため、展開の途中ではこれらを使うことにする。

<sup>\*11</sup> バネの力の式、 $F = -kx$  と同じ。



ここで、(17) の  $E_f$  などは単位長さについての弾性率であるため、その長さが  $r$  の素材では  $r$  で除して  $\frac{E_f}{r}$  とする必要があった。

これらから  $E_c$  を求める式を導出する。eqs. (16) - (18) より、

$$\Delta l_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (19)$$

$$\Delta l_f = \frac{\sigma_f \cdot r}{E_f} \quad (20)$$

$$\Delta l_m = \frac{\sigma_m \cdot (1-r)}{E_m} \quad (21)$$

これを eq. (15) に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta l_c &= \Delta l_f + \Delta l_m \\ \frac{\sigma_c}{E_c} &= \frac{\sigma_f \cdot r}{E_f} + \frac{\sigma_m \cdot (1-r)}{E_m} \end{aligned} \quad (22)$$

eq. (14) を使って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_c} &= \frac{r}{E_f} + \frac{(1-r)}{E_m} \\ \frac{1}{E_c} &= \frac{rE_m + (1-r)E_f}{E_f E_m} \\ E_c &= \frac{E_f E_m}{rE_m + (1-r)E_f} \\ E_c &= \frac{\frac{E_f}{E_m}}{r + (1-r)\frac{E_f}{E_m}} E_m \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $E_f \gg E_m$  を用いた近似を導入するために、 $k = \frac{E_f}{E_m}$  と置く。すなわち、

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{k}{r + (1-r)k} E_m \\ E_c &= \frac{1}{\frac{r}{k} + 1 - r} E_m \end{aligned} \quad (24)$$

$E_f \gg E_m$  のとき、 $\frac{1}{k} = \frac{E_m}{E_f} \doteq 0$  と近似できるので、

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{1-r} E_m \\ E_{c,T} &= E_m \cdot \frac{1}{1-r} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $E_{c,T} = E_c$  である。先の L 方向の議論と区別するために変数名を変えておいた。

複合材料全体の繊維軸直角方向の弾性率は、ほぼ \_\_\_\_\_ の弾性率とその体積比率で決定されることが分かる。すなわち、どんなに強度の高い繊維を用いても T 方向の弾性率は大きく向上しないということである。

弾性率のまとめ 本節で導出した式をまとめる。

$$\begin{aligned} E_{c,L} &= E_f \cdot r \\ E_{c,T} &= E_m \cdot \frac{1}{1-r} \end{aligned} \quad (26)$$

一般的な複合材料では繊維に高弾性材料を採用することを考え合わせて、

- 繊維軸方向の弾性率には繊維の弾性率が有効に働く。
- 繊維軸直角方向の弾性率にはどんなに高い弾性率の繊維を使っても母材の弾性率のオーダーに留まる。

#### 4.1.3 スラブモデルの問題点

前節のスラブモデルの議論では、議論を簡単にするために以下の仮定を用いていた。

- 弾性率の効果が面積に比例
- 母材と繊維が完全に接着
- 繊維と母材が等方性
- 材料の端から端まで繊維が貫通

逆に言えば、これらの効果が大きな材料では理論値と実際の値が大きく異なるということである。たとえば実際には、繊維と母材の界面近傍で応力のかかり方が一様でないことがあるし、材料が破壊する際に母材と繊維が剥離することもしばしばある。<sup>\*12</sup>線材を作成するときに軸方向に引張るプロセスによって異方性がある場合があるし、<sup>\*13</sup>材料を少数の繊維が貫通していることを前提にできないことも多い。<sup>\*14</sup>

複合材料に限らず、何らかのモデル化を行うときには前提としている仮定とそれを外れる条件について注意する必要がある。

---

\*12 ウェットな環境にあるベニヤ板の剥離など。

\*13 針金の製造工程など。

\*14 ウィスカ強化材料など。

モデル自体にも問題がないわけではない。Fig. 1(a) に示した繊維強化複合材料では、繊維軸方向と直交する 2 方向が横方向である。しかし、Fig. 1(b) のスラブモデルでは 2 方向が等価で高弾性率となっており、この点でこのモデルは不完全である。しかし、スラブモデルが第一近似として十分な説明能力を持つモデルであることは改めて強調しておく。また、単純なベニヤ板のような積層構造複合材料や、繊維方向の異なる層を重ね合わせた面内等方性を実現した FRP においては十分に妥当なモデルであるとも言える。

このような問題点を改善するモデルが幾つか提案されているが、本講義ではこれ以上立ち入らない。

## 5 まとめ

- 「設計できる材料」
- 繊維強化材料
- 定性的と定量的
- スラブモデルにおける弾性率・比弾性率の評価
- モデル化と仮定
- 弾性率の設計

## 6 小レポート

### 6.1 前回講評

「完全安定化ジルコニアでは、相変態応力が破壊応力より高くなる。」というところが重要。ある部分にかかる応力がゼロから強くなっていくときに、部分安定化ジルコニアでは先に相変態応力に達するので相変態するが、完全安定化ジルコニアでは先に破壊応力に達するので破壊する。

### 6.2 今回課題

Table 2 と スラブモデルを用いて、繊維軸方向の比弾性率が  $50 \text{ [GPa} \cdot \text{cm/g]}$  の材料を設計せよ。母材・繊維は設計可能な限りにおいて好きなものを自由に選んで良い。また、今回の講義で用いた仮定は全てそのまま用いて良い。

余力があれば、他の組み合わせを用いたときの比率を求めて議論してみると良い。何か気

付くことがあるだろう。あれば、論述してみよう。

### 6.3 コメント欄

第1回で昨年のプリントを配布したこと、またウェブ上で昨年のプリントを公開したことについて、有用であったか、来年度も継続して行うべきかなど、意見を述べてほしい。

特にない人は「どちらでもいい」とでも書いておいてください。